

Math: Algèbre (Linéaire) pour les Graphes

Définitions

Il y a 3 représentation matricelle qui seront utilisé pour représenté un graphe $G = (V, E)$:

- Par $A \in \{0, 1\}^{V \times V}$ sa **matrice d'ajascence**: Si G orienté ou non avec ou sans boucle,
 $A_{u,v} = 1 \Leftrightarrow (u, v) \in E$
- Par $M \in \{0, 1\}^{V \times E}$ sa **matrice d'incidence**: Si G non-orienté, $A_{u,e} = 1 \Leftrightarrow u \in e$
- Par $L \in \{0, 1\}^{V \times V}$ sa **matrice laplacienne**: Si G non-orienté sans boucle, pour $D \in \mathbb{N}^{V \times V}$ la matrice diagonale des degré définie par pour tout $u \neq v$, $D_{u,u} = \deg u$ et $D_{u,v} = 0$, on a $L = D - A$

LES EXOS DE CE CHAPITRE NE SONT PAS VERIFIEES ET JE NE SUIS PAS CAPABALE DE LES FAIRE.

Lights Out sur un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini simple non orienté, avec $|V| = n$. Chaque sommet porte un interrupteur et une lampe, qui peut être allumée ou éteinte. Lorsque l'on appuie sur l'interrupteur d'un sommet v , on change l'état de la lampe située en v ainsi que celui de toutes les lampes situées sur les voisins de v . On cherchera d'abord à montrer que à partir de la configuration où toutes les lampes sont éteintes, on peut toujours toutes les allumer via une séquence d'appuis d'interrupteurs.

Une *configuration* est une application $c : V \rightarrow \mathbb{F}_2$, où $c(v) = 1$ signifie que la lampe v est allumée. Pour $v \in V$, on dénote le voisinage fermé de v par

$$N[v] = \{v\} \cup \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

1. Montrer que seul la parité du nombre de fois où l'on a appuyé sur un interrupteur donné est important.

On pourra donc représenter une *stratégie* comme étant une application $x : V \rightarrow \mathbb{F}_2$, où $x(v) = 1$ signifie que l'on appuie sur le sommet v . On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ la matrice d'adjacence de G , après avoir choisi une numérotation de ses sommets, et on pose $L = I_n + A$.

2. Montrer que la colonne de L_G correspondant à un sommet v est le vecteur indicateur de $N[v]$.
3. En déduire qu'il existe une stratégie gagnante à Lights Out! si et seulement si $(1, \dots, 1) \in \text{Im}(L)$

On munit l'ensemble $\mathbb{F}_2^V$ du produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{v \in V} x(v)y(v).$$

4. Montrer que $\text{Im}(L) = \ker(L)^\perp$.
5. Montrer que l'on peut toujours allumer toutes les lampes si l'on commence initialement sur la configuration où elles sont toutes éteintes.

Graphes d'amis (Version complete)

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On dit que G est un *graphe d'amis* si pour tout $s_1, s_2 \in S$ avec $s_1 \neq s_2$, il existe un unique s' avec $\{s_1, s'\} \in A$ et $\{s_2, s'\} \in A$. On dit qu'un sommet s^* est un *roi* si pour tout $s \in S \setminus \{s^*\}$, $\{s, s^*\} \in A$.

On cherche à montrer que un graphe d'amis possède toujours un roi. Si vous avez fait l'exercice "Graphes2: Graphes d'amis non régulier" vous pouvez sauter à la question 7.

Soit G un graphe d'amis.

1. Montrer que G est connexe et que toute arête appartient à un unique triangle.
2. Soient x et y deux sommets non adjacents. Pour $u \in N(x)$, on note $f(u)$ l'unique voisin commun à u et y . Montrer que $f : N(x) \rightarrow N(y)$ est injective.
3. Montrer que si $\{x, y\} \notin E$, alors $\deg(x) = \deg(y)$.

Un graphe est dit *k-régulier* si $\forall v \in V, \deg(v) = k$. On suppose d'abord G non régulier. Soient x, y deux sommets de différent degré et z l'unique voisin commun. Comme $\deg(x) \neq \deg(y)$, on a que $\deg(z)$ est différent d'au moins un des deux, que l'on suppose sans perte de généralité être x .

Soit $w \notin \{x, y, z\}$.

4. Montrer que $w \in (N(x) \cup N(y)) \cap (N(x) \cup N(z))$.
5. Montrer que $w \notin N(y) \cap N(z)$, et en déduire que $w \in N(x)$.
6. Conclure et montrer que si G n'est pas régulier, alors G possède un roi.

On suppose maintenant que G est d -régulier pour un certain d . Par l'absurde, on suppose que G possède un roi. On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'adjacence de G , J la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $\mathbf{1}$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1.

7. Montrer que le coefficient (i, j) de M^2 est le nombre de voisins communs aux sommets i et j . En déduire $M^2 = (d-1)I_n + J$ et que $M\mathbf{1} = d\mathbf{1}$.
8. En déduire que $n = d^2 - d + 1$.

On pose $H = \mathbf{1}^\perp$ un hyperplan.

9. Montrer que H est stable par M et que J est nul sur H .
10. En utilisant le théorème spectral, montrer que H possède une base orthonormée de vecteurs propres de M . Si λ est une valeur propre associée à un vecteur de H , montrer que $\lambda^2 = d-1$.
11. En déduire que $\text{Sp}(M) = \{d, \sqrt{d-1}, -\sqrt{d-1}\}$.
12. On note r et s les multiplicités respectives des valeurs propres $\sqrt{d-1}$ et $-\sqrt{d-1}$. Montrer que

$$d + (r - s)\sqrt{d-1} = 0.$$

13. En déduire donc que $\sqrt{d-1}$ est rationnel, et même que c'est un entier qui divise d et 1. Conclure que $u = 1$, puis que $d = 2$ et $n = 3$.
14. Conclure que tout graphe d'amis possède un roi.

Bornes du rayon spectral

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté mais avec pottentiellement des boucles, on note $A_G \in \{0, 1\}^{V \times V}$ sa matrice d'adjascence, ou juste A quand il n'y a pas d'ambiguités.

1. Montrer que $\text{Tr}(A)$ est le nombre de boucle du graphe.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles. Dans quel cas $\min \text{Sp}(A) = 0$?

On note $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ le *rayon spectral* de A et $n := |V|$ le nombre de sommets. On suppose G sans boucle.

3. Calculer $\text{Sp}(A)$ si G est le graphe complet. Que vau x $\rho(A)$?

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $v^{(k)}$ le vecteur $(\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \dots, \sin(\frac{nk\pi}{n+1}))$

4. Pour G le chemin à n sommets, montrer que $(v^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ sont des vecteurs propre de A .
5. En déduire $\rho(A)$ pour G le chemin à n sommets.
6. Montrer que si G est connexe, alors $\rho(A) \leq \Delta$ avec Δ le degré maximal de G .

On a trouvé une borne supérieur de $\rho(G)$, on cherche maintenant à établir une borne inférieur. On admet le théorème de Perron-Frobinus qui dit que si M est positive, alors $\rho(M)$ est bien valeur propre de M , associé à un vecteur propre v dont toutes les composantes sont positives.

7. Montrer que si T est un arbre couvrant de G , alors $\rho(A_T) \leq \rho(A_G)$
8. Soit T un arbre, montrer que pour $n > 1$ il possède au moins deux sommets de degré 1
9. (*) Montrer le lemme de greffe: Soient a, b deux sommets de degré 1 d'un arbre T différent d'un chemin. On suppose que le chemin entre a et un sommet de degré > 2 est plus grand que le chemin entre b et un sommet de degré > 2 . On note e l'unique arrete relié à b . Montrer que

$$\rho(A_{T-e+(a,b)}) \leq \rho(A_T)$$

8. En déduire que $2 \cos(\frac{\pi}{n+1}) \leq \rho(A)$.