

Math: Théorie des ensemble et modeles en logique

Cours

- Logique intuitionniste, classique, minimale, peano, propositionnelle.
- Logique du 1er ordre, du 2de ordre. Langage $\mathcal{L}$. On note $F(\mathcal{L})$ l'ensemble des formules d'un langage donné.
- Modèle, langage, structure, formules.
- Théorie cohérente, complete, axiome récursivement énumérable.
- Théorème de complétude de Godel
- Théorème d'incomplétude de Godel
- Lowenheim Skolem
- Axiomes de ZF, ZFC (les deux avec fondation). Classes, ensembles.
- Ordinaux, Cardinaux (de von neumann). Ordinal associé à une relation bien ordonnée.
- Equivalents de l'axiome du choix simple (fonction de choix, produit non vide, lemme de zorn)
- Théorème de compacité

ZF sera supposé consistante ici.

TODO:

- Proof theoric ordinal
- https://en.wikipedia.org/wiki/Lindstr%C3%B6m%27s_theorem

Completion de théorie

Soit T une théorie du 1er ordre cohérente dans un langage $\mathcal{L}$. On pose

$$\mathcal{W} = \{U \subseteq F(\mathcal{L}) \mid U \text{ cohérent} \wedge T \subseteq U\}$$

1. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une chaîne de $\mathcal{W}$. Montrer que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est encore une théorie cohérente contenant T .

En déduire par lemme de Zorn qu'il existe une extension cohérente maximale T^* de T .

3. Montrer que la théorie T^* est complete.
4. En déduire que si T peut encoder Peano, alors T^* n'est pas récursivement énumrable.

ZF intuitionniste et le tiers exclu

On considère les axiomes de ZF en logique intuitionniste. Les axiomes de ZF ne permettent pas de prouver le tiers exclu.

1. Montrer le tiers exclu est équivalent à $\forall X \subseteq \{*\}, X = \emptyset \vee X = \{*\}$.
2. Montrer que l'axiome du choix implique le tiers-exclu.

Ind: on pourra poser $U = \{x \in \{0, 1\} \mid P \vee x = 0\}$ et $V = \{x \in \{0, 1\} \mid P \vee x = 1\}$

Le *tiers exclu faible* est la formule $\neg P \vee \neg\neg P$, et n'est pas prouvable dans ZF intuitionniste.

3. Montrer que le tiers exclu faible est équivalent à $\forall X \subseteq \{*\}, X = \emptyset \vee X \neq \emptyset$. (?)

Modèle dénombrable de ZFC et le graphe de Rado

Un graphe infini $G = (S, A)$ est dit comme respectant la *propriété de Rado* si pour tout $U, V \subseteq S$ des ensemble disjoint fini de S ,

$$U \cap V = \emptyset \implies \exists x \in S, (\forall u \in U, (x, u) \in E) \wedge (\forall v \in V, (x, v) \notin E)$$

Montrer que si G, G' sont deux graphes respectant la *propriété de Rado*, alors $G \equiv G'$ (i.e. les graphes sont isomorphes). On appelle donc *le graphe de Rado* l'unique graphe à isomorphisme près avec cette propriété.

On considère ZFC avec l'axiome de fondation que l'on suppose consistante. Soit M un modèle de ZFC. Par Lowenheim Skolem on suppose que M est dénombrable. On écrit $M = (V, E)$ avec

$$E = \{(x, y) \in V^2 \mid x \in_M y\}.$$

On considère $\overline{M}$ le symétrique de M : c'est le graphe $(V, \overline{E})$ avec $\overline{E} = E \cup \{(x, y) : (y, x) \in E\}$.

Montrer que $\overline{M}$ est le graphe de Rado. On pourra considerer $\{u_M : u \in U\} \cup \{\{v_M : v \in V\}\} \in M$.

Ordinal de Hartogs

On travaille dans ZF. Soit X un ensemble, on cherche à construire le plus petit ordinal qui s'injecte pas dans X sans l'axiome du choix. On définit $\mathcal{W}(X)$ l'ensemble

$$\mathcal{W}(X) = \{(A, R) \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(A \times A) \mid R \text{ bon ordre sur } A\}$$

1. Montrer que $\mathcal{W}(X)$ est un ensemble. Pour $(A, R) \in \mathcal{W}(X)$, on note $\text{ot}(A, R)$ l'unique ordinal isomorphe au bon ordre (A, R) .
2. Montrer que $H(X) = \{\text{ot}(A, R) : (A, R) \in \mathcal{W}(X)\}$ est un ordinal. On pose $h(X) = H(X)$.
3. Montrer que, pour tout ordinal α ,

$$\alpha < h(X) \iff \text{il existe une injection de } \alpha \text{ dans } X.$$

En déduire qu'il n'existe aucune injection de $h(X)$ dans X .

4. Montrer que $h(X)$ est le plus petit ordinal qui ne s'injecte pas dans X . On l'appelle le *nombre de Hartogs* de X .
5. Montrer que X est bien ordonnable si et seulement s'il existe une injection $f : X \hookrightarrow h(X)$. En déduire que l'énoncé « tout ensemble est bien ordonnable » est équivalent à la comparabilité de X et $h(X)$ par injection, pour tout X .

L'ordinal de Church–Kleene

Un ensemble est dit calculable lorsque sa fonction caractéristique est calculable. Un ordinal α est dit *calculable* s'il existe une partie calculable $D \subseteq \mathbb{N}$ et une relation calculable $\prec$ sur D telles que $(D, \prec)$ soit un bon ordre de type α . On définit

$$\omega_1^{\text{CK}} = \sup\{\alpha \in \text{Ord} : \alpha \text{ est un ordinal calculable}\}.$$

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de relations calculables sur les parties calculables de $\mathbb{N}$. En déduire que l'ensemble des ordinaux calculables est dénombrable.
2. Montrer que si α est calculable, alors $\alpha + 1$ est calculable. En déduire que ω_1^{CK} n'est pas un ordinal successeur.
3. Montrer que si β est un ordinal calculable et $\alpha < \beta$, alors α est calculable.
4. Montrer que ω_1^{CK} est un ordinal dénombrable, mais qu'il n'est pas calculable.