Cours

- Arbre d'inférence, contexte Γ, séquent prouvable, variables libres, liées.
- Règle d'introduction et d'élimination de chaque opérateur $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$
- Syllogisme de barbara, modus ponens.
- Etre capable de montrer la correction des règles
- Logique minimale, intuitionniste (+ $\bot_e$), classique (HP)

Exos à ajouter :

- LTS and bisumulation: formula with $a.\varphi$, $\top$, $\wedge$ characterise bisumulation Henessy-Milner Modal Logic, image finite iff ....

Arbres à faire

Montrer les séquent suivant en logique minimale:

- $(p \land (p \to q)) \vdash q$
- $A \land B \to C \vdash A \to B \to C$ (la currification)
- $A \to B \to C \vdash A \land B \to C$ (la co-currification)
- $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ (le syllogisme de barbara)
- $\vdash p \land q \to q \land p$ (la commutativité du $\land$)
- $\vdash p \lor q \to q \lor p$ (la commutatitivté du $\lor$)
- $\vdash A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ (le raisonnement par contraposé)
- $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$ (même si $\neg\neg A \to A$ n'est pas démontrable, ce séquent l'est !)
- $p \to q \vdash \neg(p \land \neg q)$ (l'équivalence de l'implication)

Arbres des lois de morgan

Montre les séquents suivant en logique minimale:

- $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
- $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

Montrer le séquent $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ en logique classique

Arbre des lois de morgan avec quantificateurs

Montrer les séquents suivants en logique intuitioniste:

- $\forall x, \neg A \vdash \neg \exists x, A$ où $x \in \mathrm{VL}(A)$
- $\exists x, \neg A \vdash \neg \forall x, A$ où $x \in \mathrm{VL}(A)$
- $\neg \exists x, A \vdash \forall x, A$ où $x \in \mathrm{VL}(A)$

Montrer en logique classique (ce séquent n'est pas démontrable en logique intuisioniste !) :

- $\neg \forall x, A \vdash \exists x, A$ où $x \in \mathrm{VL}(A)$

Equivalence entre les formules donnant la logique classique

Montrer que en logique intuitioniste, nous avons les jugements suivants:

- $A \lor \neg A \vdash ((A \to B) \to A) \to A$ (Tiers-exclu vers Peirce)
- $((A \to B) \to A) \to A \vdash A \lor \neg A$ (Peirce vers Tiers-exclu)
- $A \lor \neg A \vdash \neg\neg A \to A$ (Tiers-exclu vers élimination du double non)
- $\neg\neg A \to A \vdash A \lor \neg A$ (élimination du double non vers Tiers-exclu)

Arbres nécésitant de deviner

On définit $a \leftrightarrow b$ par $a \to b \land b \to a$.

Montrer que les séquents suivant sont prouvables en utilisant la logique intuitioniste:

- $\vdash \neg\neg(A \lor \neg A)$
- $\vdash \neg(A \leftrightarrow \neg A)$

Affaiblissement

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable alors $\Gamma, \Delta \vdash A$ l'est aussi.

XOR

On rajoute au langage des formules de logique propositionnelles l'opérateur $\oplus$ (prononcé XOR) d'arité 2, tel que pour η une valuation, on a $\eta \models \varphi \oplus \psi$ si et seulement si $\eta \models \varphi$ et $\eta \not\models \psi$ ou bien $\eta \not\models \varphi$ et $\eta \models \psi$.

1. Proposer 2 régles d'introduction et 1 règle d'élimination pour l'opérateur $\oplus$.
2. Montrer la correction de la règle, et utiliser la pour montrer la commutativité du $\oplus$.

Equivalence

On rajoute au langage des formules de logique propositionnelles l'opérateur d'équivalence $\leftrightarrow$ d'arité 2 avec les règles suivantes:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B} \leftrightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B} \leftrightarrow_l \qquad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A} \leftrightarrow_r$$

Soit μ une valuation, proposer une définition de $\mu \vDash A \leftrightarrow B$. Montrer la correction de la règle, et utiliser la pour montrer la commutativité de l'équivalence.

L'opérateur de Sheffer

On rajoute au langage des formules de logique propositionnelles *l'opérateur de Sheffer* $A \uparrow B$ tel que $A \uparrow B \equiv \neg(A \wedge B)$.

1. Montrer que $A \to B \equiv A \uparrow (B \uparrow B)$
2. Proposer une règle d'introduction et une règle d'élimination pour l'opérateur de Sheffer et montrer qu'elles sont correcte.
3. Montrer que pour chaque formule F il existe une formule F^* équivalente n'utilisant que l'opérateur de sheffer et $\top$ ou $\bot$.
4. Montrer que si $\vdash F$ est prouvable alors $\vdash F^*$ l'est aussi.

Sans implication

Soit F une formule propositionnelle, on définit par induction $\psi(F)$ la *transformé sans implications de* F par

$$\psi(A \vee B) := \psi(A) \vee \psi(B) \qquad \psi(X) := X \qquad \text{pour } X \text{ une variable}$$
$$\psi(A \wedge B) := \psi(A) \wedge \psi(B) \qquad \psi(\neg A) := \neg\psi(A)$$
$$\psi(A \to B) := \neg\psi(A) \vee \psi(B)) \qquad \psi(\top) := \top, \psi(\bot) := \bot$$

Montrer que $\vdash F$ est prouvable si et seulement si $\vdash \psi(F)$ est prouvable

Complétude[1]

On cherche à montrer que si F une formule propositionnelle est vraie pour tout modèle, alors $\vdash F$ est démontrable en logique classique.

Pour μ une valuation et φ une formule on pose

$$|\varphi|_\mu = \begin{cases} \varphi & \text{si } \mu \vDash \varphi \\ \neg\varphi & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit F une formule et $\{X_1, ..., X_n\}$ les variables propositionnelles de F. Montrer que le séquent suivant est démontrable en logique classique pour toute valuation μ :

$$|X_1|_\mu, ..., |X_n|_\mu \vdash |A|_\mu$$

2. Montrer que en logique classique, si $\Gamma, X \vdash \varphi$ et $\Gamma, \neg X \vdash \varphi$ sont prouvable, alors $\Gamma \vdash \varphi$ l'est aussi.
3. Montrer que si A est une tautologie, alors pour toute valuation μ, on a $|X_1|_\mu, ..., |X_n|_\mu \vdash A$ démontrable.
4. Conclure.

---

[1]Le magnifique livre de Mme. Galatée Hemery ! ! ! ! <3

Sans négation

Soit F une formule propositionnelle, on définit par induction $\psi(F)$ la *transformé sans négation de F* par

$$\begin{aligned}
\psi(A \vee B) &= \psi(A) \vee \psi(B) & \psi(X) &= X && \text{pour } X \text{ une variable} \\
\psi(A \wedge B) &= \psi(A) \wedge \psi(B) & \psi(\neg A) &= \psi(A) \to \bot \\
\psi(A \to B) &= \psi(A) \to \psi(B) & \psi(\top) &= \top, \psi(\bot) = \bot
\end{aligned}$$

Montrer que $\vdash F$ est prouvable si et seulement si $\vdash \psi(F)$ est prouvable

Théorie déductive des graphes

On se donne le langage de la logique du premier ordre auquel on a rajouté une relation R d'arité 2. En plus des règles concernant la déduction naturelle, on rajoute les règle suivantes, indiquant que R est symétrique et n'est pas reflexif:

$$\frac{\Gamma \vdash R(x,y)}{\Gamma \vdash R(y,x)}\text{sym} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \neg R(x,x)}\text{ nr}$$

On peut interpréter alors une formule F de cette théorie comme une formule sur des graphes non orienté sans boucle: soit $G = (V, E)$ un graphe, on a $(x, y) \in E$ si et seulement si $R(x, y)$. Par exemple, la formule "$\forall x, R(s, x)$" est la formule qui indique que s est connecté à tous les sommets.

1. Montrer que le séquent $\vdash \neg(\forall x, \forall y, R(x, y))$ est démontrable.
2. Montrer à l'aide d'un arbre de preuve que dans un graphe, si un sommet est relié à tous les autres, alors chaque sommet admet au moins un voisin.

Formule Duale

Pour F une formule de la logique propositionnelle, on définit par induction $F^\perp$ la *formule duale de F* par:

$$
\begin{aligned}
(A \vee B)^\perp &:= A^\perp \wedge B^\perp & X^\perp &:= \neg X \qquad \text{pour } X \text{ une variable} \\
(A \wedge B)^\perp &:= A^\perp \vee B^\perp & (\neg A)^\perp &:= \neg A^\perp \\
(A \to B)^\perp &:= \neg A^\perp \vee B^\perp
\end{aligned}
$$

1. Montrer que si μ est une valuation, alors $\mu \vDash \neg F$ si et seulement si $\mu \vDash F^\perp$
2. Montrer par induction sur les formules F de la logique propositionnelles que pour tout Γ, si $\Gamma \vdash \neg F$ alors il existe une preuve que $\Gamma \vdash F^\perp$ (en logique classique). On appellera cela la *loi de morgan généralisé.*

Introduction à la logique linéaire multiplicative

On définit par induction les formules de la logique linéaire par le fait que:

- X et $\overline{X}$ sont des formules pour X une variable propositionnelle
- $\varphi \otimes \psi, \varphi ⅋ \psi$ sont des formules de la logique linéiare pour φ, ψ deux formules de la logique linéaire

L'on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des formules de la logique linéaire multiplicative. L'on muni ces formules des règles de déduction suivantes:

$$\frac{}{\vdash A, \overline{A}}\ \text{ax} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ \otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}\ ⅋$$

Attention, dans ces définition Γ n'est pas un ensemble mais une liste d'hypothèses (que l'ont peut réordonnée). La multiplicité du nombre d'occurence des formules compte, et la séparation Γ, Δ dans $\otimes$ doit être une partition des hypothèses.

1. Montrer que le séquent $\vdash (A \otimes A) ⅋ \left(\overline{A} ⅋ \overline{A}\right)$ est prouvable en logique linéaire multiplicative.

Soit $F \in \mathcal{L}$, on définit par induction le dual de F, noté $F^\perp$ par $(X \otimes Y)^\perp = X^\perp\ ⅋\ Y^\perp$, $(X ⅋ Y)^\perp = X^\perp \otimes Y^\perp$, $X^\perp = \overline{X}$ et $\overline{X}^\perp = X$

2. Montrer que $\vdash F, F^\perp$ pour $F \in \mathcal{L}$.

3. $(*)$ Montrer que si $\vdash \Gamma, F$ et $\vdash \Delta, F^\perp$, alors $\vdash \Gamma, \Delta$

Contexte On dit qu'une règle déductive est *admissible* si en suppossant qu'il existe une preuve de toute ses prémisse, il existe une preuve de la conclusion. Une règle est admissible si elle est "inutile" au système mais est plus puissante qu'une règle dérivable (qui est elle juste qu'une macro). On a donc montré que la règle cut est admissible:

$$\frac{\vdash \Gamma, F \quad \vdash \Delta, F^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{cut}$$

Et avec ça, on a montré le théorème bien compliqué que s'il existe une preuve utilisant la règle cut, il existe une sans.

Correspondance du système à la Hilbert[2]

Si F est une formule, on dit que G est une sous-formule de F (noté $G \prec F$) si on peut remplacer des variable propositionnelle de F en d'autres formules pour obtenir G. Par exemple, la formule $(X \wedge Y) \to (X \wedge Y) \wedge (X \to Y)$ est une sous-formule de $A \to A \wedge B$ obtenu en remplaçant A par $X \wedge Y$ et B par $X \to Y$. On ne peut pas remplacer la même variable par deux formules différente.

Pour R un ensemble de formules, on considère le *système logique à la hilbert sur R* (on le note avec $\rhd_H$) possédant les 2 règles suivantes:

$$\frac{}{\rhd_R F}\ \text{Ax} \qquad \text{pour } F \prec G, G \in R$$

$$\frac{\rhd_R A \qquad \rhd_R A \to B}{\rhd_R B} \to_e$$

Remarquer que comme R ne change jamais dans les règles, $\rhd_R$ en une sorte de système ou les axiomes sont les formules R avec uniquement la règle $\underset{e}{\to}$

On fixe $H = \{A \to B \to A, (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)\}$. On souhaite montrer que $\rhd_H X$ si et seulement si X est prouvable en logique minimale seulement avec les règles $\underset{i}{\to}$, $\underset{e}{\to}$, Ax.

1. Montrer le séquent $\rhd_H (A \to B) \to (A \to A)$ est prouvable.
2. Montrer que si $\rhd_X F$ est prouvable et que on a $F' \prec F$ et $X \subseteq X'$, alors $\rhd_{X'} F'$ l'est aussi. En déduire que $\rhd_H A \to A$ est prouvable avec une bonne instantiation de B dans la question précédente.

On fixe Γ un ensemble de formules propositionnelle et $\Delta = \Gamma \cup H$

3. Montrer que si $\rhd_\Delta F$ est prouvable, alors $\Gamma \vdash F$ est prouvable en logique minmale seulement avec les règles $\underset{i}{\to}$, $\underset{e}{\to}$, Ax
4. Montrer les 2 faits suivants:
   - Si $\rhd_\Delta B$ est prouvable alors $\rhd_\Delta A \to B$ est prouvable
   - Si $\rhd_\Delta A \to B \to C$ et $\rhd_\Delta A \to B$ sont prouvable alors $\rhd_\Delta A \to C$ est prouvable
5. Montrer que si $\rhd_{\Delta \cup \{F\}} G$ est prouvable alors $\rhd_\Delta F \to G$ l'est aussi.
6. En déduire la réciproque de la question 3

On peut s'amuser à ajouter les autres opérateurs !

7. Proposer une formule $F_\wedge^i$ de la forme $[...] \to A \wedge B$ et deux formules $F_\wedge^{e,g}$ et $F_\wedge^{e,d}$ de la forme $A \wedge B \to [...]$ de telle sorte a ce que $\vdash \varphi$ soit démontrable en logique minimale avec les règles Ax, $\underset{i}{\to}$, $\underset{e}{\to}$, $\wedge_i$, $\wedge_e^g$, $\wedge_e^d$ si et seulement si $\rhd_{H \cup \left\{F_\wedge^i, F_\wedge^{e,g}, F_\wedge^{e,d}\right\}} \varphi$ est prouvable.
8. Meme question pour le $\vee$ et le $\neg$.

[2]Partie 4 du projet de rocq du cours PRFA 2025/2026

$\neg\neg$-Traduction de Godel-Kolmogorov[3]

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des formules de logique propositionnelle. Pour $F \in \mathcal{L}$, on définit inductivement la non-non traduction de F note $F^{\neg\neg}$ par:

$$(A \wedge B)^{\neg\neg} := A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg} \qquad X^{\neg\neg} := \neg\neg X \quad \text{pour } X \text{ une variable}$$
$$(A \to B)^{\neg\neg} := A^{\neg\neg} \to B^{\neg\neg} \qquad (\neg A)^{\neg\neg} := \neg A^{\neg\neg}$$
$$(A \vee B)^{\neg\neg} := \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg})$$

Pour $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ on note $\Gamma^{\neg\neg} := \{\Gamma_1^{\neg\neg}, ..., \Gamma_n^{\neg\neg}\}$. On note $\Gamma \vdash_i F$ s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash F$ en logique intuitioniste (sans utiliser la règle raa du raisonnement par l'absurde) et $\Gamma \vdash_c F$ s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash F$ en logique classique.

1. Montrer que $\neg\neg F^{\neg\neg} \vdash_i F^{\neg\neg}$.
2. Montrer que $\Gamma \vdash_c F$ ssi $\Gamma^{\neg\neg} \vdash_i F^{\neg\neg}$.

[3] Tiré de https://www.lirmm.fr/~retore/LL/nonnon.pdf

Logique multiplicative

On définit la logique déductive multiplicative sur les formules constitué seulements de $\wedge$ et $\rightarrow$ par celle respectant les règles suivantes. Attention, pour l'axiome, on n'a pas de Γ :

$$\frac{\Gamma, A \vdash' B}{\Gamma \vdash' A \rightarrow B} \underset{i}{\rightarrow} \qquad \frac{\Gamma \vdash' A \rightarrow B \qquad \Delta \vdash' A}{\Gamma \cup \Delta \vdash' B} \underset{e}{\rightarrow} \qquad \frac{}{F \vdash' F} \text{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash' A \qquad \Delta \vdash' B}{\Gamma \cup \Delta \vdash' A \wedge B} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash' A \wedge B}{\Gamma \vdash' A} \wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash' A \wedge B}{\Gamma \vdash' B} \wedge_e^d$$

1. Montrer que le séquent $\vdash F$ est prouvable en logique minimale ssi $\vdash' F$ est prouvable en logique multiplicative.
2. Proposer des règles pour l'introduction et l'élimination du $\vee$ pour la logique multiplicative et traiter leur cas pour la question 1.

Modèles de Kripke

On pose $\mathcal{V}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Soit F une formule sur $\mathcal{V}$, on appelle un **Modèle de Kripke** un arbre $T = (W, E)$ muni d'une fonction $\rho : W \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que pour tout enfant e d'un parent p, on a $\rho(p) \subseteq \rho(e)$. On note $\mathcal{E}(v)$ l'ensemble des descendants accessibles depuis v. On aura toujours $v \in \mathcal{E}(v)$.

On définit par induction le fait qu'une formule F est vérifié par un noeud $v \in V$ d'un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ (noté $\mathcal{M}, v \vDash F$) par:

- $\mathcal{M}, v \vDash X$ si $X \in \rho(v)$
- $\mathcal{M}, v \vDash A \wedge B$ si $\mathcal{M}, v \vDash A$ et $\mathcal{M}, v \vDash B$
- $\mathcal{M}, v \vDash A \vee B$ si $\mathcal{M}, v \vDash A$ ou $\mathcal{M}, v \vDash B$
- $\mathcal{M}, v \vDash A \to B$ si pour tout $e \in \mathcal{E}(v)$, on a que $\mathcal{M}, e \vDash A$ implique $\mathcal{M}, e \vDash B$
- $\mathcal{M}, v \vDash \neg A$ si pour tout $e \in \mathcal{E}(v)$, on a pas $\mathcal{M}, e \vDash A$

On note $\mathcal{M} \vDash F$ pour dit que pour tout $v \in W$ on a $\mathcal{M}, v \vDash F$, et l'on notera $\vDash F$ si pour tout $\mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \vDash F$.

1. Donner un modèle de Kripke $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \nvDash X \vee \neg X$
2. - Montrer le lemme de persistance: si $\mathcal{M}, v \vDash F$ et $w \in \mathcal{E}(v)$, alors $\mathcal{M}, w \vDash F$.
   - Montrer par induction que si $\Gamma \vdash F$ est prouvable en logique intuitioniste, alors pour tout modèle de Kripke tel que pour tout $A \in \Gamma$ on a $\mathcal{M} \vDash A$, on aura nécessairement $\mathcal{M} \vDash F$
3. En déduire que l'on ne peut pas démontrer ni $A \vee \neg A$ ni $\neg\neg A \to A$ en logique intuistioniste.

Logiques intermédiaires Pour F une formule de variables propositionnelles $X_1, ..., X_n$ et pour $F_1, ..., F_n$ des formules propositionnelles, on note $F' := F[X_1 \leftarrow F_1, ..., X_n \leftarrow F_n]$ la formule où, pour tout i, l'on a remplacé X_i par F_i. Dans ce cas on dit que F' est une instanciation de F. Par exemple, $(A \to B) \vee \neg(A \to B)$ est une instanciation de $F = A \vee \neg A$

Pour F une formule on note par $\vdash_F$ le système de la logique intuitioniste auquel on rajoute la règle

$$\frac{}{\Gamma \vdash_F F'}\mathrm{Ax}_{F'} \quad \text{pour } F' \text{ une instanciation de } F$$

4. Montrer que $\vdash_{A \vee \neg A} F$ est prouvable ssi $\vdash F$ est prouvable en logique classique.
5. Montrer que s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que pour toute instanciation F' de $F = A \vee \neg A$, on a $\mathcal{M} \vDash F'$, alors on peut transformer $\mathcal{M}$ en un modèle $\mathcal{M}'$ reconnaissant les memes formules en un arbre de hauteur 0.

Soient $X_0, ..., X_n, ...$ une suite infinie dénombrable de variables propositionnelles. On définit

$$P_0 := X_0 \vee \neg X_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} := X_{n+1} \vee (X_{n+1} \to P_n)$$

6. Montrer que $\vdash_{P_n} P_{n+1}$
7. Montrer qu'il nexiste pas de modèle $\mathcal{M}$ de profondeur de moins que n tels que $\mathcal{M} \vDash P'$ pour toute instanciation de P' de P_{n+1}
8. Montrer qu'il existe un moddèle de profondeur n tels que $\mathcal{M} \vDash P_n$
9. Pour F une formule, on pose $\mathcal{L}_F := \{\varphi \mid \vdash_F \varphi \text{ est prouvable}\}$. Montrer qu'il existe une suite infinie de formules $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$... \subsetneq \mathcal{L}_{\varphi_3} \subsetneq \mathcal{L}_{\varphi_2} \subsetneq \mathcal{L}_{\varphi_1} \subsetneq \mathcal{L}_{A \vee \neg A}$$

Fun fact: avec de la théorie plus poussé, on a que il y a un continuium $\aleph_1$ de logiques.

Logique modale[4]

On cherche ici à représenter des formules déontiques, c'est-à-dire des formules représentant plusieurs situations analogues qui se déroule en même temps et qui sont liées. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables propositionnelle, on définit par induction l'ensemble des formules déontique $\mathcal{D}$ comme:

- Si $X \in \mathcal{V}$ alors $X \in \mathcal{D}$,
- Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, les formules $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ et $\neg\varphi$ sont des formules déontique,
- Si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $\Box\varphi \in \mathcal{D}$ et $\Diamond\, \varphi \in \mathcal{D}$.

La formule $\Box\varphi$ se lit “partout φ” et la formule $\Diamond\, \varphi$ se lit “quelquepart φ”

1. Donner la formule représentant “si partout $A \to B$, et si quelquepart A, alors quelquepart B”.

On cherche maintenant à attribuer une valeur de vérité à de telle formules. Soit F une formule de variables propositionnelles V, on définit un **modèle de Kripke de F** comme un couple $(\mu_1, ..., \mu_n)$ tel que pour tout $i \leq n$ on a $\mu_i : V \longrightarrow \{\top, \bot\}$ une valuation. Soit $\mathcal{M} = (\mu_1, ..., \mu_n)$ un modèle de Kripke, on définit $\mathcal{M} \vDash_i \varphi$ par induction:

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{M} \vDash_i A & \text{si } A \in V \text{ et } \mu_i(A) = \top \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \wedge \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ et } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \vee \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ ou } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \to \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ implique } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \neg\varphi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ est faux} \\
\mathcal{M} \vDash_i \Diamond\, \varphi & \text{si } \exists j, \mathcal{M} \vDash_j \varphi \\
\mathcal{M} \vDash_i \Box\varphi & \text{si } \forall j, \mathcal{M} \vDash_j \varphi
\end{array}$$

Dans ce cas on dit que $\mathcal{M}$ *satisfait* φ au i-ème monde. Si $\mathcal{M} = (\mu_1, ..., \mu_n)$ et que pour tout i, $\mathcal{M} \underset{i}{\vDash} \varphi$ on dira que $\mathcal{M}$ satisfait φ. Si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de Kripke on a $\mathcal{M} \vDash \varphi$, on dit que φ est une *tautologie*, et on note cela $\vDash \varphi$.

2. Pour chacune des formules φ suivante, indiquer s'il existe un modèle la satisfaisant, s'il existe un modèle satisfaisant $\neg\varphi$ et si elles sont des tautologies:

$\varphi_1 =$ "$A \wedge \Diamond\, \neg A$" $\qquad$ $\varphi_2 =$ "$\Box(A \wedge \Diamond\, \neg A)$" $\qquad$ $\varphi_3 =$ "$\Box(\Box A \to \Box A)$"

3. Montrer que $\mathcal{M} \vDash_i \Diamond\, P$ est vrai si et seulement $\mathcal{M} \vDash_i \neg(\Box\neg P)$ est vrai.
4. En déduire un algorithme qui transforme une fomule déontique en une formule équivalente n'utilisant pas $\Diamond$.

On étudie maintenant que les formules déontiques sans $\Diamond$. On rajoute aux règles de la déduction naturelle de la logique classique les 3 règles suivantes:

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi} D_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Box(\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \Box\varphi \to \Box\psi} D_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Box\varphi}{\Gamma \vdash \neg\Box\neg\varphi} D_3$$

5. Montrer que $\vdash \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$
6. Montrer que $\vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$
7. Montrer que le système est correct, c'est-à-dire que si $\vdash \varphi$ est démontrable pour φ une formule sans $\Diamond$ alors $\vDash \varphi$ est vrai.

[4] Centrale Info 2026

Logique linéaire temporelle & automates de Buchis (sujet d'écrit)

On cherche ici à représenter des formules qui utilise une certaine notion de temps qui passe. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble fini de variables propositionnelle, on définit par induction l'ensemble $\mathcal{L}$ des formules temporelles linéaire comme:

- Si $X \in \mathcal{V}$ alors $X \in \mathcal{L}$,
- Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, les formules $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \to \psi)$ et $\neg\varphi$ appartiennent à $\mathcal{L}$,
- Si $\varphi \in \mathcal{L}$ alors $\Box\varphi \in \mathcal{L}$, $\bigcirc\,\varphi \in \mathcal{L}$ et $\Diamond\,\varphi \in \mathcal{L}$.

La formule $\Box\varphi$ se lit "pour toujours φ", la formule $\Diamond\,\varphi$ se lit "au bout d'un moment φ" et la formule $\bigcirc\,\varphi$ se lit "demain φ".

1. Donner la formule représentant "si au bout d'un moment on aura toujours φ, alors pour toujours au bout d'un moment φ".

On cherche maintenant à attribuer une valeur de vérité à de telle formules. Soit F une formule de variables propositionnelles $\mathcal{V}$, on définit un modèle $\mathcal{M}$ de logique linéaire temporel comme une suite infinite de valuation $\mathcal{M} = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ la valuation μ_i soit une valuation de $\mathcal{V}$. L'idée est que la valuation μ_i représente ce qui est vrai au jour i. On définit alors $\mathcal{M} \vDash_i \varphi$ par induction:

$$\begin{array}{lr}
\mathcal{M} \vDash_i A & \text{si } A \in V \text{ et } \mu_i(A) = \top \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \wedge \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ et } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \vee \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ ou } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \varphi \to \psi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ implique } \mathcal{M} \vDash_i \psi \\
\mathcal{M} \vDash_i \neg\varphi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_i \varphi \text{ est faux} \\
\mathcal{M} \vDash_i \bigcirc\,\varphi & \text{si } \mathcal{M} \vDash_{i+1} \varphi \\
\mathcal{M} \vDash_i \Box\varphi & \text{si } \forall j \geq i, \mathcal{M} \vDash_j \varphi \\
\mathcal{M} \vDash_i \Diamond\,\varphi & \text{si } \exists j \geq i, \mathcal{M} \vDash_j \varphi
\end{array}$$

Dans ce cas on dit que $\mathcal{M}$ *satisfait* φ au i-ème jour. Si $\mathcal{M} \vDash_0 \varphi$ on dira que $\mathcal{M}$ satisfait φ. Si pour tout modèle $\mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \vDash \varphi$, on dit que φ est une *tautologie*, et on note cela $\vDash \varphi$. La précédence de $\bigcirc, \Box, \Diamond$ est la même que $\neg$, càd $\Box A \wedge B = (\Box A) \wedge B$ et $\Box A \to B = (\Box A) \to B$

2. Pour chacune des formules φ suivante, indiquer s'il existe un modèle la satisfaisant, s'il existe un modèle satisfaisant $\neg\varphi$ et si elles sont des tautologies:

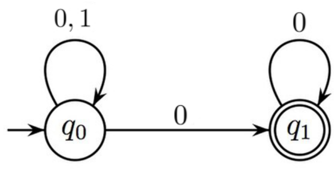
$$\varphi_1 = A \wedge \Diamond\,\neg A \qquad \varphi_2 = \Box\,\Diamond\,\varphi \to \Diamond\,\bigcirc\,\varphi \qquad \varphi_3 = \Box(\varphi \to \psi) \wedge \neg\,\Diamond\,\psi$$

3. Montrer que $\vDash \Diamond\,\Box A \to \Box\,\Diamond\,A$. Qu'est-ce que ça veux dire ?

Un **automate de Büchi** est un automate (Q, Σ, T, I, F) complet permettant de reconnaître des mots infinis, avec $I, F \subseteq Q$ et $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$. Soit X un ensemble de mots. On note X^ω l'ensemble des mots infinis de X défini formellement par $x \in X^\omega$ s'il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $x = x_0 x_1 x_2 \ldots$

Un mot infini x sur Σ^ω est reconnu par un automate de Büchi lorsqu'il existe un chemin infini dans cet automate étiqueté par x, commençant par un état initial et passant une infinité de fois par un état final.

4. Quel est le langage reconnu par l'automate de Buchi:



5. Proposer un automate de Buchi recconnaissant $(01)^\omega$.

Comme $\mathcal{V}$ est fini, une valuation peut être représenté par $\mu \in \{\text{true}, \text{false}\}^{\mathcal{V}}$ qui est un ensemble fini. On pose $\Sigma_{\mathcal{V}} = \{\text{true}, \text{false}\}^{\mathcal{V}}$. Un modèle peut donc être assimilé à un mot infini $\mathcal{M} \in \Sigma_{\mathcal{V}}^\omega$. Pour φ une formule de logique linéaire temporelle, on note $L(\varphi) = \{\mathcal{M} \in \Sigma_{\mathcal{V}}^\omega \mid \mathcal{M} \vDash \varphi\}$ le langage reconnu par la formule.

6. Donner $L(\Box(x \to \bigcirc\,\neg x) \wedge \Box(\neg x \to \bigcirc\,x))$
7. Montrer que si $L(\varphi)$ et $L(\psi)$ sont reconnu par un automate de Buchi, alors $L(\varphi \vee \psi)$ est reconnu par un automate de buchi.
8. Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, T, I, F)$ un automate de Buchi sur Σ fini. Pour chaque état $q \in Q$, on pose X_q une variable propositionnelle représentant le fait que l'automate soit à l'état q et pour chaque $\alpha \in \Sigma$, on pose A_α la variable représentant le fait que l'on soit actuellement en train de lire un α. Donner des formules pour:
   - Le fait que à tout moment, on ne soit que dans un et un seul état.
   - Le fait que à tout moment, on ne lise qu'une et une seule lettre
   - Le fait que on passe de X_q à $X_{q'}$ vrais seulement si A_α est vrai pour $(q, \alpha, q') \in T$
   - Le fait que l'on passe une infinité de fois par $\{X_q : q \in F\}$

   En déduire que si L est reconnu par automate de Buchi alors il existe une formule φ tel que $L(\varphi) = L$

On va essayer de montrer que L est reconnu par un automate de Buchi si et seulement si il existe φ tel que $L = L(\varphi)$, et donc que de tester si une formule est vrai ou fausse est décidable. On a fait le sens simple, mais la preuve du sens retour est très délicate, principalement dans le cas de la négation.

Soient φ, ψ deux formules de langage reconnu par $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, T, I, F)$ et $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, T', I', F')$.

9. Montrer que $L(\Box\varphi)$ et $L(\bigcirc\,\varphi)$ sont reconnus par des automates de Buchi.
10. Pourquoi l'automate produit classique de l'intersection ne marche pas pour reconnaître $L(\varphi \wedge \psi)$?

En considérant une extension de l'automate produit $\mathcal{A}_\wedge = (Q_\wedge, \Sigma, T_\wedge, I_\wedge, F_\wedge)$ avec un bit d'information bonus $b \in \{0, 1\}$: on pose $Q_\wedge = Q \times Q' \times \{0, 1\}$ et $F_\wedge = F \times Q' \times \{0\} \cup Q \times F' \times \{0\}$, tel que à chaque rencontre avec un $F_\wedge$ on alterne le bit d'information $b \leftarrow 1 - b$.

10. Donner une définition formelle de $T_\wedge$. Montrer que $L(\varphi \wedge \psi)$ est reconnu par $\mathcal{A}_\wedge$.