Cours

- Chemin alternant.
- Cliques et graphe biparti. Biparti ssi pas de cycle impair.
- Couplage maximal, maximum, parfait.
- Arbre couvrant, Kruksal
- Tri topologique, recherche de composante fortement connexes, Kosaraju
- Algo couplage max dans biparti
- Sous-graphe, graphe induit (HP)
- Multigraphe, hypergraphe (HP)
- k-coloration (HP)
- Graphes planaire (HP)

Question de Cours

- Montrer qu'un couplage est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chemin alternant augmentant pour ce couplage.
- Montrer qu'un graphe est biparti ssi il ne contient pas de cycles impair

Graphes à unique sortie

On dit que $G = (V, E)$ un graphe orienté est un *graphe à unique sortie* si $\forall v \in V, d_+(v) = 1$. Dans ce cas, on le représentera par un tableau T de longueur $|V|$ tel que $T[i]$ corresponde à l'unique sommet $u \in V$ tel que $(i, u) \in E$.

Question 1 Dessiner le graphe correspondant au tableau $[0, 2, 1, 2, 4, 1, 3]$

Question 2 Montrer que le graphe contient autant de cycles que de composantes faiblement connexe.

Question 3 Proposer un algorithme pour calculer le nombre de cycles du graphe.

Question 4 Proposer un algorithme qui teste si le graphe possède un couplage parfait dans sa version non orienté (où l'on ignore les directions).

Kruskal en recherche locale

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe pondéré par $w : E \to \mathbb{R}_+$, on pose $\operatorname{Couv}(G)$ l'ensemble des arbres couvrants. Si $T = (V, E')$ est un arbre couvrant, on note $T[e' \leftarrow e]$ le graphe obtenu en retirant l'arête $e' \in E'$ de T et en y ajoutant l'arête $e \notin E'$.

Question 1 Dans quel cas est-ce que $T[e' \leftarrow e]$ est aussi un arbre couvrant ?

Question 2 Montrer qu'une arête $e \in E$ est choisie par tous les arbres couvrants si et seulement si $G - e$ n'est plus connexe.

Question 3 Montrer que s'il n'existe pas de e, e' tel que $w(T[e' \leftarrow e]) < w(T)$ avec $T[e' \leftarrow e] \in \operatorname{Couv}(G)$, alors T est un arbre couvrant de poids minimal.

On considère alors l'algorithme qui commence sur un arbre couvrant quelquonque T et qui remplace T par $T[e' \leftarrow e]$ tant que c'est possible pour diminuer $w(T)$. C'est ce que on appelle un algorithme de *recherche locale* car il (localement) change l'arbre de manière à atteindre un arbre couvrant de poids minimum.

Question 4 Donner la complexité d'un tel algorithme.

Graphes k-réguliers

On dit que $G = (V, E)$ est un graphe k-régulier si $\forall v \in V, \deg(v) = k$

Question 1 Proposer un algorithme qui donne un couplage maximal dans un graphe 2-régulier.

Question 2 Montrer qu'il existe un graphe k-régulier à $2n$ sommets si $2n \geq k + 1$

Question 3 Montrer qu'il existe un graphe $2k$-régulier à n sommets si $n \geq 2k + 1$

Question 4 Montrer qu'il existe un graphe k régulier si et seulement si $n \geq k + 1$ avec nk pair.

Théorème de Hall

Soit $G = (V, E)$ un graphe, soit $A \subseteq V$, on définit l'ensemble $\mathcal{V}(A)$ des *voisins* de A dans G par

$$\mathcal{V}(A) = \{u \in V \setminus A \mid \exists v \in A, (v, u) \in E\}$$

On dit qu'un graphe biparti $G = (U \sqcup V, E)$ de parties U, V vérifie la *condition des mariages* si pour tout $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$, on a $|A| \leq |\mathcal{V}(A)|$

On cherche à montrer le lemme des mariages: un graphe biparti $G = (U \sqcup V, E)$ de parties U, V admet un couplage parfait si et seulement si G vérifie la condition des mariages.

Question 1 Montrer que G est connexe si et seulement si pour tout $A \subsetneq V$ non vide, $|\mathcal{V}(A)| \geq 1$

Question 2 Montrer que s'il existe $A \subseteq U$ tel que $|A| > |\mathcal{V}(A)|$, alors il n'existe pas de couplage parfait.

Soit G respectant la condition des mariages. Soit H le plus petit ensemble d'arêtes de G tel que $G_H = (V, H)$ respecte toujours la condition des mariages. On note $\deg_H(v) = |\mathcal{V}(\{v\}) \cap H|$

Question 3 Montrer que $|U| = |V|$, et que $\forall v \in V, \deg_H(v) \geq 1$.

Question 4 Montrer que H est un couplage parfait.

Maille d'un graphe

Le *diamètre* de G est la longueur du plus long chemin dans G. On définit la *maille* d'un graphe G comme étant la plus petite longueur d'un cycle de G. On la note, si elle existe, par $\mathcal{M}(G)$. Si la maille existe on dit que le graphe est *maillé*.

Question 1 Soit d le diamètre d'un graphe maillé. Montrer que $\mathcal{M}(G) \leq 2d+1$

Question 2 Montrer que si G est un graphe biparti maillé, alors $\mathcal{M}(G)$ est pair.

Question 3 Montrer qu'un graphe à n sommets qui contient au plus un cycle contient au plus n arêtes.

Question 4 Montrer que la maille d'un graphe à n sommets et au moins $n+1$ arêtes est majorée par $\left\lfloor \frac{2n+2}{3} \right\rfloor$

Question 5 Soit $G = (V, E)$ un graphe maillé, on note $m = \mathcal{M}(G)$ et δ le plus petit degré de G. Montrer que

$$|V| \leq \frac{2}{\delta - 2}\left((\delta-1)^{\frac{m}{2}} - 1\right)$$

Largeur de bande

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe. Le diamètre de G, noté $d(G)$, est la longueur du plus long chemin dans G. Pour une fonction dite *d'étiquetage* $f : V \to [\![1; |V|]\!]$ bijective, on définit la *largeur de* f *dans* G comme

$$\psi(f, G) := \max\{|f(u) - f(v)| : \{u, v\} \in E\}$$

La *largeur de bande de G*, notée $\psi(G)$, est la plus petite largeur d'une fonction d'étiquetage de G possible

Question 1 Calculer la largeur de bande du graphe de la question 1 (ignorer les poids).

Question 2 Que vaux la largeur de bande d'un cycle à $n \geq 3$ sommets ?

Question 3 Soit $\Delta(G)$ le degré maximal de G, montrer que $\Delta(G) \leq 2\psi(G)$

Question 4 On considère un coloriage des sommets de G tel que chaque arête de G relie deux sommets de couleurs distinctes. Montrer que le nombre minimal de couleurs utilisées pour un tel coloriage est majoré par $\psi(G) + 1$.

Question 6 Montrer que

$$\frac{|S| - 1}{d(G)} \leq \psi(G) \leq |S| - d(G)$$

Graphes planaires

Un graphe $G = (V, E)$ est *planaire* s'il existe $p : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(a, b), (a', b') \in E$, les segments ouverts $]p(a), p(b)[$ et $]p(a'), p(b')[$ ne se croisent pas. Soit $n \in \mathbb{N}$, on dénote par K_n le graphe complet à n sommets. On dénote par $K_{a,b}$ le *graphe biparti complet* contenant $a + b$ sommets, tel que tous les sommets de 1 à a soient relié à tous les sommets de $a + 1$ à b (sans aucune autre aretes).

Une *face* d'un graphe planaire est un cycle délimitant une zone de la représentation (aka une des parties connexe de $\mathbb{R}^2$ auquel on a retiré tous les points dans un segment de G).

Question 1 Montrer que K_4 et $K_{3,2}$ sont planaire

Question 2 Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire, on note c le nombre de composante connexes et f le nombre de faces. Montrer que $f + |V| = |E| + c + 1$

Question 3 Montrer que dans tout graphe planaire, $3f \leq 2a$. En déduire que $a \leq 3(n - 2)$ dans un graphe connexe planaire et que donc K_5 n'est pas planaire.

Question 4 Montrer que dans un graphe sans triangle (sans 3 sommets reliés entre eux), $a \leq 2(n - 2)$. En déduire que $K_{3,2}$ n'est pas planaire.

Question 5 Montrer que tout graphe planaire à au moins un noeud de degré ≤ 5.

Question Bonus Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe planaire à plus de 9 sommets, alors $\overline{G} = \left(V, \overline{E}\right)$ n'est pas planaire.

Couverture d'aretes et couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, on dit que $A \subseteq E$ est une *couverture d'arette* si pour tout $v \in V$, on a un $e \in A$ tel que recouvre v. On dit que A est une couverture d'arêtes *minimale* si A est une couverture d'arête de plus petit cardinal.
Un graphe *étoile* est un graphe tel qu'il existe un sommet u tel que toutes les arêtes sont de la forme $\{u, x\}$.

On cherche à montrer que si M un couplage maximal et A une couverture d'arête minimale, alors

$$|A| + |M| = |V|$$

Question 2 Montrer que s'il existe un couplage parfait M, alors c'est une couverture d'arêtes minimale.

On fixe A une couverture d'arête minimale.

Question 3 Montrer que les graphes étoiles sont exactement les graphes ou il n'existe pas de chemin de longueur strictement plus grande que 2. En déduire que A est une union disjointe de composantes connexe qui sont des graphes étoile.

Question 4 Montrer que $|A| + |M| \geq |V|$

Question 5 Montrer que $|A| + |M| = |V|$. *Indication: On montrer l'inégalité dans l'autre sens. On se fixe un couplage maximal M et on construit une couverture minimale X en prenant M et en ajoutant une arête par sommet non couvert. Borner la taille de X.*

C-approx du couplages maximum[1]

Pour M un couplage, on note $S(M)$ les sommets saturé de M.

On considère l'algorithme suivant:

Entrée: G un graphe
$M \leftarrow$ un couplage maximal de G
tant que $\exists\{u', u\}, \{u, v\}, \{v, v'\} \in E$ avec $\{u, v\} \in M$ et $u', v' \notin S(M)$:
    $M \longleftarrow (M \setminus \{u, v\{\}\}) \cup \{\{u', u\}, \{v, v'\}\}$
fin tant que
retourner M

1. Quelle est la complexité de l'algorithme ?
2. Montrer que l'algorithme est une C-approx du couplage maximum pour un certain C que l'on déterminera.

On change la boucle pour chercher un chemin alternant P de longueur $2t + 1$, et si on en trouve un on effectue $M \longleftarrow (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$. L'algorithme donné correspond donc au cas $t = 1$.

3. Donner le facteur d'approximation en fonction de t, et en déduire un *PTAS*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a un algorithme polynomial qui renvoie une $(1 - \varepsilon)$-approximation. On déterminera exactement la complexité en fonction de ε.

[1]TD11 L3 ENS Lyon Algo 1

Calcul de triangles[2]

Question 1 Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle impair.

Définition Pour $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec $V = \{1, ..., n\}$, on dit que $\{x, y, z\} \subseteq V$ est un *triangle* si $\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\} \in E$. On cherche à calculer tous les triangles sans doublons d'un graphe G.

Question 2 Proposer un algorithme en $O(|V|^3)$

Question 3 Soit L_1, L_2 deux listes trié d'entiers de 1 à n, montrer que l'on peut calculer la liste triée des élément appartenant aux deux listes en temps $O(|L_1| + |L_2|)$.

Question 4 Donner un algorithme en $O(|E| \times \Delta)$ pour calculer tous les triangles sans doublons d'un graphe G ou Δ est le degré maximal de G. On supposera que G est donné sous la forme d'une liste d'adjacence.

Question 5 Dans quels cas est-ce que l'algorithme de la question 4 est meilleur que celui de la question 2 ?

---

[2]Tiré de Mallory Marin

Graphes d'amis

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté tel que pour toute paire $(s_1, s_2) \in S^2$, il existe un **unique** $s' \in S$ tel que (s_1, s') et $(s', s_2) \in E$. Montrer qu'il existe un sommet relié à tous les autres.

Graphes d'amis 2

Soit $m \geq 3$. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté tel que pour tout m personnes choisies, il existe un unique $s \in S$ qui est reliées aux m personnes. Quel est le dégrée max du graphe ?

Planaire et degré

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k-régulier si $\forall v \in V, \deg(v) \geq k$. Un graphe G est dit planaire s'il existe une assignation $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que pour toute paire d'arête $(x, y), (x', y') \in E$, les segments $[\varphi(x); \varphi(y)]$ et $[\varphi(x'); \varphi(y')]$ ne se coupent pas.

Soit G connexe planaire. On définie f le nombre de face comme le nombre de composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{(x,y)\in E}[\varphi(x); \varphi(y)]$.

1. Montrer le théorème d'Euler: $|E| = |V| + f - 2$
2. En déduire que $|E| < 3|V|$
3. En déduire que si G est planaire alors il n'est pas 6-régulier.

Un Graphe dénombrable

On prend $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans les parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer qu'a isomorphisme près, et en retirant les boucles, le graphe $(\mathbb{N}, \{\{x, y\} : y \in \varphi(x)\})$ est unique.

Trouver l'isomorphisme pour φ_1, φ_2 deux bijections.

Graphes d-dégénéré[3]

Un graphe $G = (V_G, E_G)$ est dit d-dégénéré s'il existe un ordre $v_1, ..., v_n$ des sommets de G tel que, pour tout $i \leq n$, le sommet v_i au plus d voisins parmis $\{v_1, ..., v_{i-1}\}$. La dégénéresence d'un graphe, noté $\mathcal{D}(G)$, est le plus petit d tel que G est d-dégénéré.

Question 1 Montrer que si G contient une clique de taille k alors $\mathcal{D}(G) \geq k - 1$

Question 2 Montrer que tout sous-graphe d'un graphe d-dégénérer est aussi d-dégénéré.

Question 3 Montrer que G est d-dégénéré si et seulement si $\forall S \subseteq V_G$, $G[S]$ possède un sommet de degré $\leq d$

Question 4 Donner un algo polynomial qui prend un graphe d-dégénéré et renvoie $(d + 1)$-coloration

---

[3] InfoFonda 2026 partie I

Coeur de k-domination[4]

Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe. On dit que $D \subseteq V_G$ domine X si $X \subseteq N(D)$ avec $N(A)$ les voisins de A (incluant A). Si $X = V_G$, on dit que D domine X. On dit que D *quasi-domine* X si D domine tout X sauf au plus un point.

Soit $k \geq 2$. Un coeur de k-domination est un X tel que tout dominant de X de taille k domine nécessairement tout le graphe.

Question 1 Soit X tel que $\forall x \in V_G, |N(v) \cap X| < \left\lfloor |X \frac{|}{k} \right\rfloor$. Montrer que G n'admet pas d'ensemble quasi-dominant de X de taille au plus k.

Un graphe est dit sans $K_{t,t}$ si le graphe biparti complet à deux parties de t sommets n'est pas présent comme sous-graphe. On considère l'algo suivant:

> **Entrée:** Un graphe G sans $K_{t,t}$, $X \subseteq V_G$.
> $Y \leftarrow G$
> $S \leftarrow \emptyset$
> **tant que** $\exists v \notin S, |N(v) \cap Y| \geq \left\lfloor |Y \frac{|}{k} \right\rfloor$ **faire:**
> $S \leftarrow S \cup \{v\}$
> $Y \leftarrow N(v) \cap Y$
> **fin tant que**
> **retourner** Y, S

Question 2 Montrer que si $|X| \geq 2tk^t$ alors l'algorithme termine en au plus $t - 1$ itérations de la boucle.

On suppose que $|X| \geq 2tk^t$, et on se donne S, Y le résultat de l'algorithme

Question 3 Montrer que tout ensemble quasi-dominant de taille au plus k intersecte S. En déduire que, soit $y \in Y$, si D domine $G - y$ alors D domine G

Question 5 En déduire un algorithme polynomial qui prend un $k \geq 2$ et un graphe G sans $K_{t,t}$ qui retourne un coeur de k-domination de taille au plus $2tk^t$.

[4]InfoFonda 2026 partie IV

Théorème de vizig[5]

Soit $G = (V, E)$ un graphe, on note Δ le degré maximal d'un graphe, on dit que $\gamma : E \longrightarrow \{1, ..., k\}$ est une *k-coloration d'aretes* si pour toute paire d'arête e, e' partageant une extrémité, on a $\gamma(e) \neq \gamma(e')$. Une coloration est dite partielle si la fonction l'est.

On cherche à montrer que tout graphe est $(\Delta + 1)$-coloriable en arête.

Question 1 Montrer que tout graphe est $2\Delta - 1$-arête coloriable

Question 2 Montrer qu'un graphe ne peux pas être k-coloré pour $k < \Delta$.

Pour γ une coloration on note $\overline{\gamma}(u)$ l'ensemble des couleurs des arête d'extrémité u qui **ne** sont **pas** prise. Soient a, b deux couleurs, on définit $K(a/b)$ la **chaine de Kempe** comme étant un ensemble d'arettes maximal pour l'inclusion contenant que des arettes de couleur a ou b

Question 3 Montrer que $G[K(a/b)]$ est une union disjointe de cycle de longueur pair ou de chemins.

Question 4 Soit G biaprti, γ une coloration partielle, $(u, v) \in E_G$ avec $a \in \overline{\gamma}(u)$ et $b \in \overline{\gamma}(v)$. Montrer que si u et v ne peuvent pas être dans la même composante connexe de $K(a/b)$

Question 5 Montrer que si G est biparti alors G est $\Delta(G)$-arête-colorable

Question 6 Soit $(u, v) \in E$ une arête non coloré d'une coloration partielle γ et soient a, b deux couleurs telle que $a, b \in \overline{\gamma}(u)$ et $b \in \overline{\gamma}(v)$. Montrer qu'il existe γ' qui colorie les même arêtes telle que

- $\overline{\gamma'}(u) = \overline{\gamma}(u)$,
- $a \in \overline{\gamma'}(v)$ et
- $\overline{\gamma'}(x) = \overline{\gamma}(x)$ pour tout $x \in V \setminus \{u, v\}$ sauf au plus un qui vérifie alors $\left(\overline{\gamma'}(x) \setminus \overline{\gamma}(x)\right) \cup \left(\overline{\gamma}(x) \setminus \overline{\gamma'}(x)\right) = \{a, b\}$

Question 6 Soit γ une k-coloration partielle de G dont tous les arêtes non coloré $e_1, ..., e_r$ sont toutess de la forme $e_i = (u, v_i)$. On suppose que $|\overline{\gamma}(u)| \geq r$, $|\overline{\gamma}(v_1) \cap \overline{\gamma}(u)| \geq 1$ et que pour tout $i \geq 2$, on a $|\overline{\gamma}(v_i) \cap \overline{\gamma}(u)| \geq 2$. Montrer que G est k-colorable.

Question 7 En déduire que tout graphe est $(\Delta + 1)$-arête-colorable.

Question 8 Montrer que pour tout $d > 1$ il existe un graphe G non d-arete colorable de degré maximum d.

---

[5] InfoFonda 2026 partie V

FPT: Kernelisation de Feedback vertex set

On considère le problème FEEDBACK-VERTEX-SET suivant:

- **Entrée:** Un multigraphe $G = (V_G, E_G)$ et $k \in \mathbb{N}$
- Est-ce qu'il existe $S \subseteq V_G$ avec $|S| \leq k$ tel que pour tout cycle C de G, $C \cap S \neq \emptyset$

1. Montrer que pour $k = 1$ et $k = 2$ le problème est polynomial
2. Soit (G, k) une instance et v un sommet de degré 1. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - v, k)$ l'est aussi.
3. Soit G une instance et v un sommet de degré 2 relié $u, u' \neq v$. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - u + \mathrm{uu}', k)$ l'est aussi
4. Soit G une instance et v un sommet avec une boucle. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - v, k - 1)$ l'est aussi.

Soit G le graph obtenu après exécution des deux règles précédentes autant de fois que possible. On a donc que le degré minimum de G est 3. On note V_{3k} les $3k$ sommets de plus grand degré. Soit S est une solution de FEEDBACK-VERTEX-SET, on suppose par l'absurde que S n'intersecte pas V_{3k}.

5. Montrer que, pour $d = \min_{x \in V_{3k}} \deg(x)$, on a

$$\sum_{v \in X \cup V_{3k}} \deg v \geq 3|X| + 3kd$$

6. Montrer que $G[X \cup V_{3k}] \leq |X| + 3k - 1$
7. En déduire une contradiction.
8. Montrer alors que pour tout $k \leq \log(\log(n))$ il existe un algorithme polynomial pour FEEDBACK-VERTEX-SET. On donnera la complexité.

FPT: Kernelisation de Vertex cover

On considère le problème VERTEX-COVER suivant:

- **Entrée:** Un graphe $G = (V_G, E_G)$ et $k \in \mathbb{N}$
- Est-ce qu'il existe $S \subseteq V_G$ avec $|S| \leq k$ tel que toutes les arêtes sont adjascente à un $s \in S$?

1. Montrer que pour tout k fixé, le problème est polynomial. *On admet qu'il est NP-Complet dans le cadre général*
2. Soit (G, k) une instance et v un sommet de degré 0. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - v, k)$ l'est aussi.
3. Soit (G, k) une instance et v un sommet de degré $\geq k + 1$. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - v, k - 1)$ l'est aussi.
4. Montrer que après exécution des deux règles précédentes autant de fois que possible, on a $|V| \leq k^2 + k$
5. En déduire que VERTEX-COVER possède un algorithme correcte dont la complexité peut s'exprimer sous la forme $O(f(k)n^c)$ pour f, c que l'on donnera.

Avec une décomposition en couronne on peut réduire la taille de G par d'autres règles tel que $|V| \leq 3k$.

Avec de la programmation linéaire et de la relaxation on peut montrer qu'on peut réduire la taille de G tel que $|V| \leq 2k$.

FPT: Kernelisation de Edge clique cover

On considère le problème EDGE-CLIQUE-COVER suivant:

- **Entrée:** Un graphe $G = (V_G, E_G)$ et $k \in \mathbb{N}$
- Est-ce qu'il existe $S_1, ..., S_k \subseteq V_G$ tel que $G[S_i]$ soit une clique pour tout $i \leq k$ et que $E_G = \bigcup_i E(G[S_i])$

1. Montrer que pour $k = 1$ et $k = 2$ le problème est polynomial
2. Soit (G, k) une instance et v un sommet de degré 1. Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - v, k - 1)$ l'est aussi
3. Soit $(u, v) \in E$ tel que $N(u) = N(v)$ (avec $N(x)$ le voisinage de x). Montrer que (G, k) est une instance positive ssi $(G - u, k)$ l'est.
4. Montrer que après exécution des deux règles précédentes autant de fois que possible, on a $|V| \leq 2^k$
4. En déduire que pour $k \leq \log_2(|V|)$, le problème EDGE-CLIQUE-COVER est polynomial.