Cours

- Définition d'une relation d'équivalence.
- Définition d'une relation d'ordre, ordre total = bon ordre.
- Minimum, éléments comparables, incomparables, chaine, antichaine.
- Les deux définitions d'un ordre bien fondé, et la démonstration de leur équivalence.
- Préordre, préordre bien fondé = WQO (HP)
- Montrer que $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé.
- Ordre lexicographique, ordre produit. Démonstration que si A, B sont bien ordonné, alors $A \times B$ l'est aussi pour l'ordre produit et l'ordre lexicographique
- Qu'est-ce qu'un ensemble inductif ?

Des ordres

Les ordres suivant sont-ils bien fondés ?

1. $\leq$ sur $\mathbb{Z}$
2. $\leq$ sur $\mathbb{R}^+$
3. $\leq$ sur $\mathbb{Q}^+$
4. $\leq_{\text{lex}}$ sur $\mathbb{N}^2$
5. $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
6. $\subseteq$ sur $\mathcal{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N})$

Des ensembles inductifs

Proposer une définition inductive de chacun des ensemble suivants

1. $2\mathbb{N}$
2. Les mots sur un alphabet Σ fixé
3. Les puissances de 2
4. $\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y\right\}$
5. $\left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 2x = y\right\}$
6. Les listes d'entiers contenant un 42

Soustraction entière

La soustraction entière est la fonction $\mathrm{sub} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définit par:

$$\begin{cases} \mathrm{sub}(m, 0) = m \\ \mathrm{sub}(0, n) = 0 \\ \mathrm{sub}(m, n) = \mathrm{sub}(m-1, n-1) \end{cases}$$

1. Montrer que sub est bien définie.
2. Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N}, \mathrm{sub}(m, n) \leq m$

Ordre sur les mots

Étant donné un ensemble alphabet Σ, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Sigma^n = \underbrace{\Sigma \times \ldots \times \Sigma}_{n \text{ fois}}$$

des mots d'exactement n lettres. L'ensemble $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ est alors l'ensemble de tous les mots sur Σ.

1. Soit un ensemble ordonné $(\Sigma, \leq)$ tel que $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $a < b < c$. Donner une définition de l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^3 puis l'utiliser pour ordonner les mots aba, baa, caa, aaa, abc, bbb.
2. Montrer que l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^n est une relation d'ordre bien fondée.
3. Est-ce que l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ est une relation d'ordre bien fondée sur Σ^* ?
4. Montrer que l'ordre $\leq_m$ sur Σ^* définit par

$$u \leq_m v \text{ si et seulement si } |u| < |v| \text{ ou } (|u| = |v| \text{ et } u \leq_{\text{lex}} v)$$

est une relation d'ordre totale sur Σ^*. Est-ce que $\leq_m$ est bien fondé ?

5. En déduire que l'ensemble Σ^* est dénombrable.

Tri aléatoire

On considère l'algorithme de tri suivant:

- Tant qu'il existe $i < j$ tel que $T[i] > T[j]$, on échange $T[i]$ et $T[j]$

1. Montrer que cet algorithme termine toujours
2. Quel est sa complexité dans le pire des cas ?

Langage de Dyck

On se fixe un ensemble fini de lettres $\Sigma = \{a, b\}$. On déifni un *mot* comme étant une suite finie de lettres de Σ. Le mot vide (la suite vide) sera noté ε, et la concaténation de deux mots u, v sera noté par la concaténation uv. On définit par induction l'ensemble A par:

- $\varepsilon \in A$
- Si $u \in A$, alors $aub \in A$
- Si $u, v \in A$, alors $uv \in A$

1. Montrer que tous les mots dans A ont autant de a que de b
2. Monter que l'ensemble de ces règles sont ambigues. Proposer sans justifier une verison non-ambigue (et faite la vérifier par la colleuse avant de passer à la suite).
3. Soit $w_1 ... w_n$ un mot de A, montrer qu'il existe un $i \leq n$ tel que pour tout $j < i$, le mot $w_1 ... w_j$ possède strictement plus de a que de b et que le mot $w_1 ... w_i$ possède autant de a que de b
4. Montrer que votre définition de la question 2 est équivalente à la définition question 1.

Système MIU

On pose $\Sigma = \{M, I, U\}$ et on définit inductivement l'ensemble $S \subseteq \Sigma^*$ par les règles suivantes:

- $MI \in S$
- Si $x \in \Sigma^*$ et $xI \in S$ alors $xIU \in S$
- Si $x \in \Sigma^*$ et $Mx \in S$ alors $Mxx \in S$
- Si $x, y \in \Sigma^*$ et $xIIIy \in S$ alors $xUy \in S$
- Si $x, y \in \Sigma^*$ et $xUUy \in S$ alors $xUy \in S$

Ce système est extrait du livre « Gödel, Escher, Bach » de Douglas Hofstadter, sous la forme du puzzle suivant: est-ce que la chaîne MU appartient au système MIU ?

1. Montrer que $MUIU \in S$
2. Donner l'ensemble des chaines de S que l'on peut dériver en appliquant au plus 3 règles.
3. Démontrer que toute chaine $s \in S$ commence par un M
4. Démontrer que pour toute chaine $s \in S$, son nombre de $|s|_M$ de M est exactement 1
5. Démontrer que pour tout chaine $s \in S$, son nombre de $|s|_I$ de I n'est jamais un multiple de 3. Conclure.

Sous-ordres indénombrable de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$

1. **(∗)** Est-ce qu'il existe $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ indénombrable tel que tous les éléments de A sont incomparable deux à deux pour $\subseteq$?
2. **(∗ ∗ ∗)** Est-ce qu'il existe $T \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ indénombrable tel que $(T, \subseteq)$ soit une relation d'ordre totale ?